TD1_Les torseurs

Exercice 1 :

Soient les trois vecteurs $\vec{V}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{V}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{j}$ définis dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et liés respectivement au points $A(0,1,2)$, $B(1,0,2)$, $C(1,2,0)$

1) Construire le torseur $[T]_O$ associé au système de vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$;
2) En déduire l'automoment ;
3) Calculer le pas du torseur ;
4) Déterminer l'axe central du torseur vectoriellement et analytiquement.

Solution :

1) Les éléments de réduction du torseur $[T]_O$ sont :

La résultante : $\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{j} + 3\vec{k}$

Le moment au point O : $\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{V_3}$

$$\overrightarrow{M_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) L'automoment : $A = \vec{R} \bullet \overrightarrow{M_O} = \left(\vec{j} + 3\vec{k} \right) \bullet \left(-\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \right) = -2 - 3 = -5$

3) Pas du torseur : $p = \dfrac{\vec{R} \bullet \overrightarrow{M_O}}{R^2} = \dfrac{-5}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = -\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

4) Equation vectorielle de l'axe central :

Si l'axe (Δ) est un axe central alors : $\forall\ P \in (\Delta) \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_p = \lambda \vec{R}$

Son équation vectorielle est donnée par : $\vec{OP} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} + \lambda \vec{R}$ avec $\lambda \in IR$

$$\vec{OP} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{i} + \left(-\frac{3}{10} + \lambda\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{10} + 3\lambda\right)\vec{k}$$

Si $\vec{OP} = \left\{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right._{R_0}$ alors : $x = \dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{3}{10} + \lambda$ et $z = \dfrac{1}{10} + 3\lambda$

D'où : $z = \dfrac{1}{10} + 3\left(y + \dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{1}{10} + 3y + \dfrac{9}{10} = 3y + 1$

L'axe central est une droite dans un plan parallèle au plan *(yOz)* situé à $x = \dfrac{1}{2}$ et

d'équation : $z = 3y + 1$

Exercice 2 :

Soit A un point de l'espace dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, avec $\vec{OA} = -\frac{21}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} - \frac{12}{9}\vec{k}$ et un vecteur $\vec{V_1} = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ dont l'axe passe par le point A .

Soit $[T_2]_0$ un torseur défini au point O par ses éléments de réduction $\vec{R_2}$ et $\vec{M_{20}}$ tel que :

$$[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R_2} = (\alpha - 4)\vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} \\ \vec{M_{20}} = (2\alpha + 9)\vec{j} + (-3\alpha - \frac{2}{3})\vec{k} \end{cases}$$

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_0$ dont la résultante est le vecteur $\vec{V_1}$;
2) Pour quelle valeur de α les deux torseurs sont égaux ;
3) En déduire le pas et l'axe central du torseur $[T_2]_0$ pour cette valeur de α .
4) Calculer le produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$

Solution :

1) Eléments de réduction du torseur $[T_1]_0$

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{V_1} = -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{10}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} \end{cases} \quad ; \quad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{M_{10}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} = \begin{pmatrix} -21/9 \\ -4/9 \\ -12/9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix}$$

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{V_1} = -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{10}} = 11\,\vec{j} - (11/3)\,\vec{k} \end{cases}$$

2) Les deux torseurs sont égaux si leurs éléments de réductions sont égaux.

$$[T_1]_0 = [T_2]_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{V_1} = \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_{10}} = \overrightarrow{M_{20}} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} -3\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k} = (\alpha - 4)\,\vec{i} + \alpha\,\vec{j} + 3\alpha\,\vec{k} \\ 11\,\vec{j} - \dfrac{11}{3}\vec{k} = (2\alpha + 9)\,\vec{j} + (-3\alpha - \dfrac{2}{3})\,\vec{k} \end{cases}$$

Cette égalité est vérifiée pour : $\underline{\alpha = 1}$

4) Pas et axe central du torseur $[T_2]_0$ pour $\alpha = 1$.

Le torseur s'écrit : $[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_2 = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{M}_{20} = 11\vec{j} - (11/3)\vec{k} \end{cases}$

Pas du torseur : $P_2 = \dfrac{\vec{R}_2 \bullet \vec{M}_{20}}{R_2^2} = \dfrac{1}{19}\left(-3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(11\vec{j} - \dfrac{11}{3}\vec{k}\right) = 0$

Axe central du torseur : C'est l'ensemble des point P tel que : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{M}_{20}}{R_2^2} + \lambda \vec{R}_2$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{110}{57} - 3\lambda \\ -\dfrac{11}{19} + \lambda \\ -\dfrac{33}{19} + 3\lambda \end{pmatrix}$$

si (x, y, z) sont les coordonnées du point P alors : nous aurons les trois équations scalaires:

$$x = -\frac{110}{57} - 3\lambda \quad , \quad y = -\frac{11}{19} + \lambda \quad , \quad z = -\frac{33}{19} + 3\lambda$$

le point P décrit la courbe : $2x + 3y + z = -\dfrac{385}{57}$

5) Produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$

Pour $\alpha = 2$ le torseur $[T_2]_0$ s'écrit : $[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{20} = 13\vec{j} - \dfrac{20}{3}\vec{k} \end{cases}$

$$[T_1]_O \bullet [T_2]_O = \begin{cases} \vec{V}_1 \\ \overrightarrow{M}_{1O} \end{cases} \bullet \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_{2O} \end{cases} = \vec{V}_1 \bullet \overrightarrow{M}_{2O} + \vec{R}_2 \bullet \overrightarrow{M}_{1O} = -7$$

Exercice 3 :

Soient deux torseurs $[T_1]_0$ et $[T_2]_0$ définis au même point O dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{R_1} = 2\sin\alpha\,\vec{i} + 2\cos\alpha\,\vec{j} \\ \overrightarrow{M_{10}} = a\cos\alpha\,\vec{i} - a\sin\alpha\,\vec{j} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R_2} = 2\sin\alpha\,\vec{i} - 2\cos\alpha\,\vec{j} \\ \overrightarrow{M_{20}} = -a\cos\alpha\,\vec{i} - a\sin\alpha\,\vec{j} \end{cases}$$

1) Déterminer les pas des deux torseurs ;
2) Quelle est la nature des deux torseurs ;
3) Déterminer l'axe central du torseur $[T_2]_0$;
4) Déterminer l'invariant scalaire du torseur $[T_3]_0$ défini par : $[T_3]_0 = k_1[T_1]_0 + k_2[T_2]_0$ où k_1 et $k_2 \in IR$;
5) En déduire l'équation scalaire de la surface engendrée par l'axe central quand k_1 et k_2 varient ;
6) Calculer le produit des deux torseurs $[T_1]_0$ et $[T_2]_0$;